

4.) Lineare Schaltungen mit passiven Bauelementen

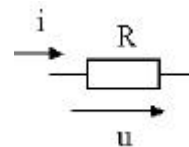
4.1 Die Schaltelemente Widerstand, Kapazität, Induktivität und Übertrager

4.1.1 Betrieb mit allgemein zeitlich veränderlichen Strömen und Spannungen

Wirkwiderstand R:

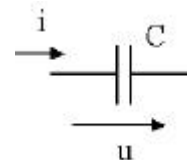
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(Das Ohmsche Gesetz gilt für jeden Zeitpunkt.)



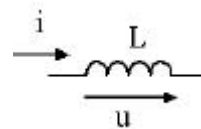
Kapazität C:

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{bzw.} \quad u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + u(t_0)$$



Induktivität L:

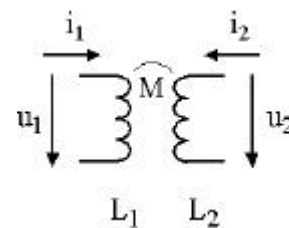
$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + i(t_0)$$



Übertrager:

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \quad \text{und}$$

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

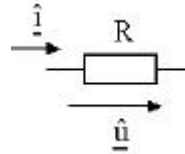


4.1.2 Betrieb mit sinusförmigen Strömen und Spannungen

Wirkwiderstand R:

$$\underline{\hat{u}} = R \underline{\hat{i}}$$

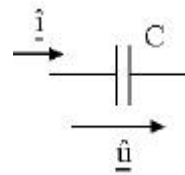
Impedanz $\underline{Z} = R$



Kapazität C:

$$\underline{\hat{i}} = j\omega C \cdot \underline{\hat{u}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\hat{u}} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{i}}$$

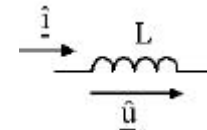
$$\text{Impedanz } \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$



Induktivität L:

$$\underline{\hat{u}} = j\omega L \cdot \underline{\hat{i}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\hat{i}} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{\hat{u}}$$

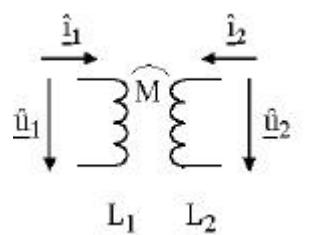
Impedanz $\underline{Z} = j\omega L$



Übertrager:

$$\underline{\hat{u}}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{\hat{i}}_1 + j\omega M \cdot \underline{\hat{i}}_2 \quad \text{und}$$

$$\underline{\hat{u}}_2 = j\omega M \cdot \underline{\hat{i}}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{\hat{i}}_2$$



Der Übertrager ist ein Zweitor (spezieller Vierpol mit zwei Anschlußpaaren). Er kann durch einen Satz von vier komplexen Widerstandswerten, die Z-Parameter, beschrieben werden.

$$\underline{Z}_{11} = j\omega L_1 = \underline{\hat{u}}_1 / \underline{\hat{i}}_1 \quad \text{für } \underline{\hat{i}}_2 = 0 : \text{Eingangsimpedanz für Leerlauf am Ausgang}$$

$$\underline{Z}_{12} = j\omega M = \underline{\hat{u}}_1 / \underline{\hat{i}}_2 \quad \text{für } \underline{\hat{i}}_1 = 0 : \text{Rückwirkungsimpedanz für Leerlauf am Eingang}$$

$$\underline{Z}_{21} = j\omega M = \underline{\hat{u}}_2 / \underline{\hat{i}}_1 \quad \text{für } \underline{\hat{i}}_2 = 0 : \text{Übertragungsimpedanz für Leerlauf am Ausgang}$$

$$\underline{Z}_{22} = j\omega L_2 = \underline{\hat{u}}_2 / \underline{\hat{i}}_2 \quad \text{für } \underline{\hat{i}}_1 = 0 : \text{Ausgangsimpedanz für Leerlauf am Eingang}$$

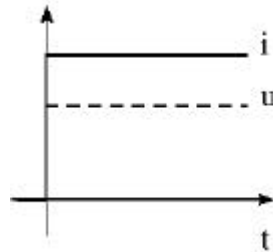
4.1.3 Anregung mit der Sprungfunktion

Vorgegeben sei $i(t) = I \varepsilon(t)$.

Damit wird die Spannung für

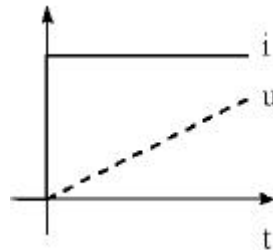
Wirkwiderstand R:

$$u(t) = R I \varepsilon(t).$$



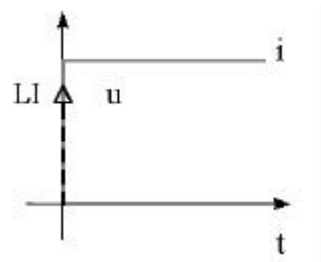
Kapazität C:

$$u(t) = u(t=0) + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \frac{1}{C} I t$$



Induktivität L:

$$u(t) = L \frac{d(I \cdot \varepsilon(t))}{dt} = L I \delta(t)$$

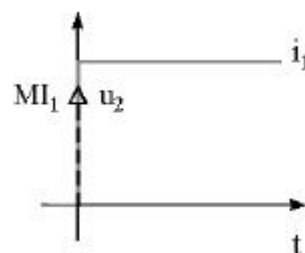


Übertrager:

Vorgegeben sei $i_1(t) = I_1 \varepsilon(t)$ und $i_2(t) = 0$.

Damit wird die Spannung u_2 :

$$u_2(t) = M \frac{d(I_1 \cdot \varepsilon(t))}{dt} = M I_1 \delta(t)$$



4.2 Zusammenschaltung von Widerstand R mit Kondensator C

4.2.1 Tiefpaß mit Widerstand und Kapazität

(A) Betrieb mit sinusförmigen Strömen und Spannungen; Betrachtung im Frequenzbereich

Gegeben: $u_1(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$
 R, C

Gesucht: i_1 und u_2

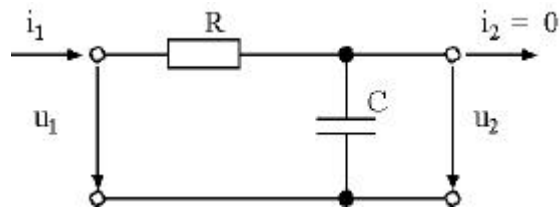


Bild 4-1 RC-Tiefpaß

Komplexe Darstellung:

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_1 e^{j\varphi_1}, \quad Z_R = R, \quad Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{Eingangsimpedanz: } Z_{\text{ein}} = \hat{u}_1 / \hat{i}_1 = R - j \frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \hat{i}_1 = \frac{\hat{u}_1}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \hat{u}_1 \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR}$$

$$\text{Betrag: } |\hat{i}_1| = \hat{u}_1 \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\text{Phase: } \varphi_{i1} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega CR)$$

$$\text{also } i_1(t) = \hat{u}_1 \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega CR))$$

$$\text{und } \hat{u}_2 = \hat{i}_1 \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) = \hat{u}_1 \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

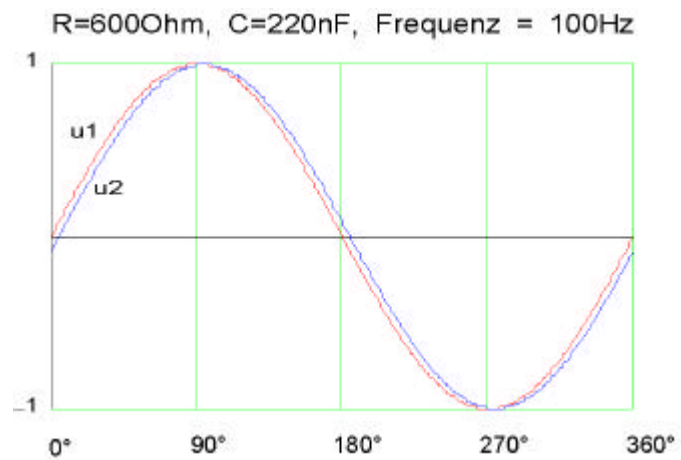
$$\text{Betrag: } |\hat{u}_2| = \hat{u}_1 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\text{Phase: } \varphi_{u2} = \varphi_1 - \arctan(\omega CR)$$

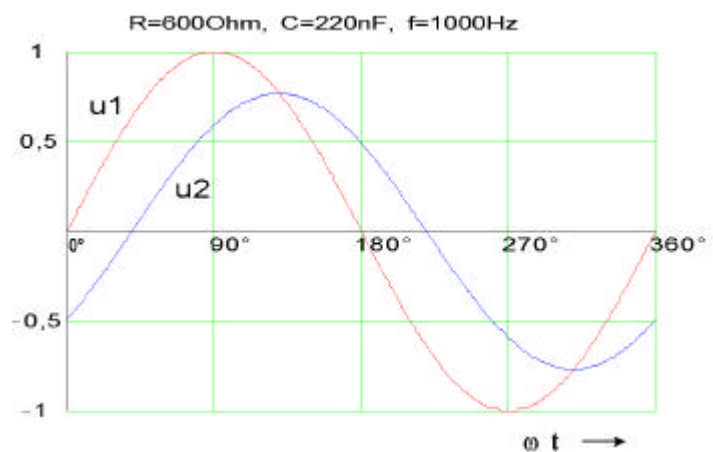
$$\text{also } u_2(t) = \hat{u}_1 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1 - \arctan(\omega CR))$$

Zeitliche Verläufe von Ein- und Ausgangsspannung im Vergleich

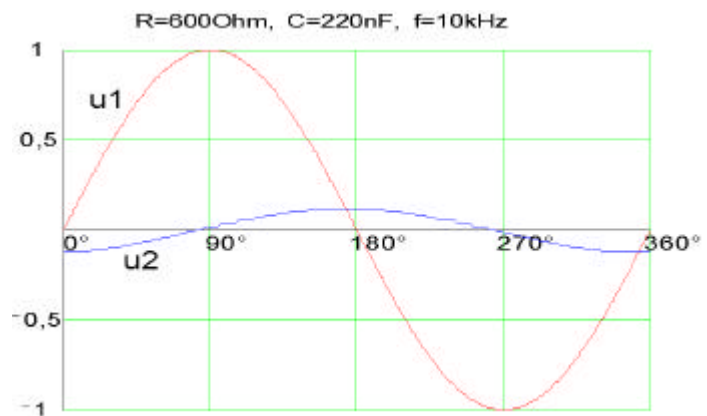
- (a) Betrieb bei sehr tiefer Frequenz
im Durchlaßbereich



- (b) Betrieb bei der Grenzfrequenz
zwischen Durchlaß- und
Sperrbereich



- (c) Betrieb bei höheren Frequenzen
im Sperrbereich



Bilder 4-2a-c RC-Tiefpaß, Anregung mit sinusförmiger Spannung

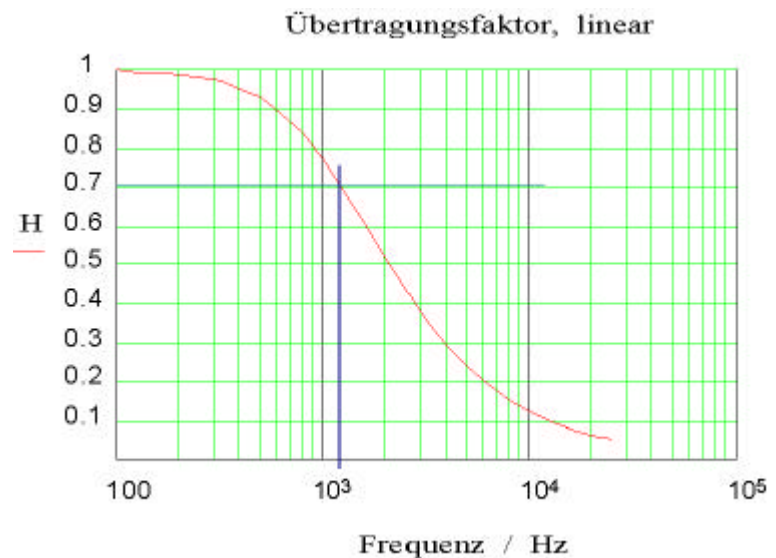
Übertragungsfaktor $\underline{H}(f)$:

$$\underline{H}(f) = \hat{u}_2 / \hat{u}_1 = \frac{1}{1+j\omega CR}$$

Betrag: $|\underline{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$

Phase: $\varphi(f) = -\arctan(\omega CR)$

Bild 4-3 Übertragungsfaktor $|\underline{H}|$
 für einen RC-Tiefpass mit
 $R = 600\Omega$ und $C = 220\text{pF}$



Die Grenzfrequenz f_g ist definiert für den Punkt, in dem $|\underline{H}|$ gegenüber dem Maximalwert 1 auf 70,7% (entspr. -3dB) abgefallen ist. Im Beispiel Bild 4-3 ist dies ca. $f_g = 1200\text{Hz}$.

Bild 4-4 zeigt den Betrag und den Phasenwinkel des Übertragungsfaktors in der Darstellung des Bode-Diagramms; der Betrag ist im logarithmischen Maß mit der Einheit dB abgebildet, siehe Bild 4-4a. Die Grenzfrequenz (blaue vertikale Linie) liegt hier bei $|\underline{H}|_{\log} = -3\text{dB}$, der Phasenwinkel hat bei der Grenzfrequenz den Wert -45° , siehe Bild 4-4b.

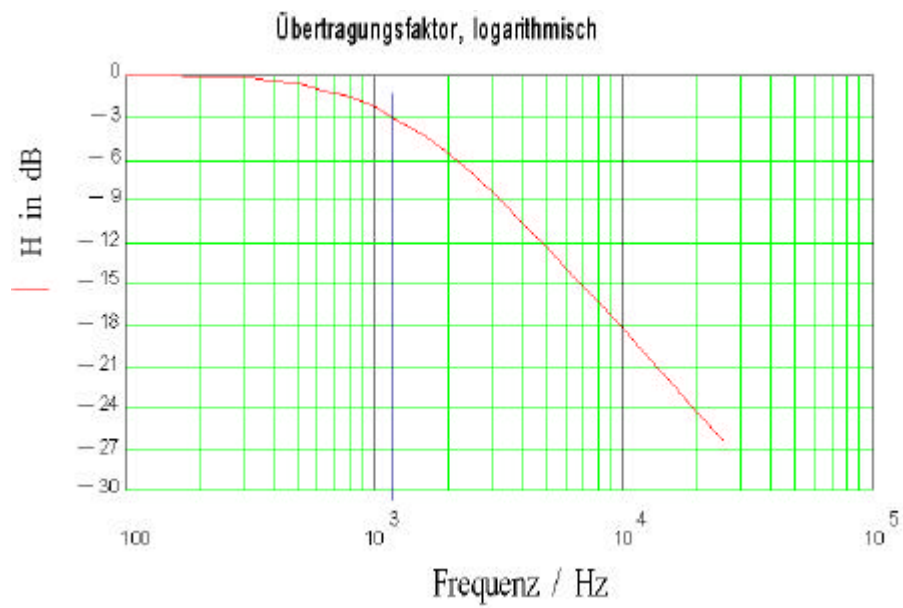


Bild 4-4a RC-Tiefpass zu Bild 5-1, Übertragungsfaktor im logarithmischen Maß

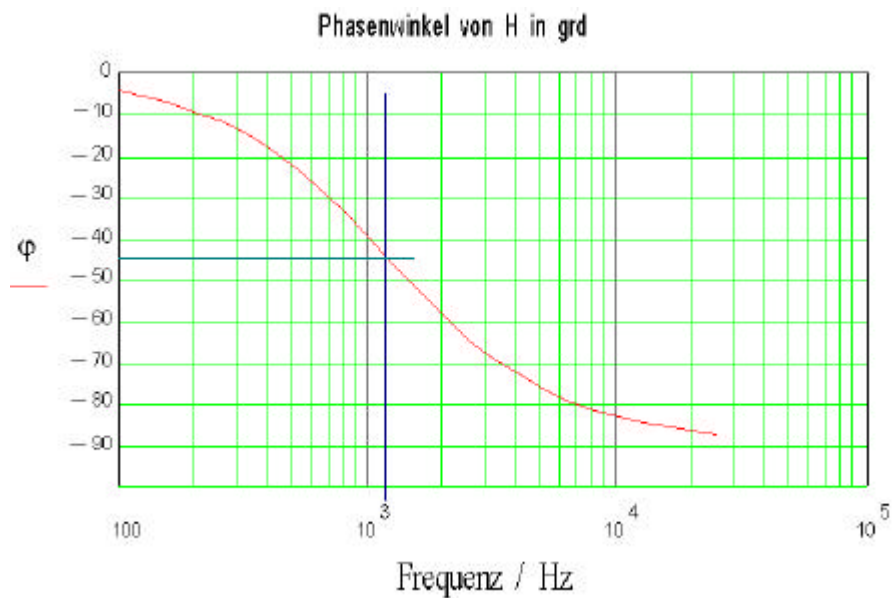


Bild 4-4b RC-Tiefpass zu Bild 5-1, Phasenwinkel

(B) Anregung mit Sprungfunktion; Betrachtung im Zeitbereich

Der RC-Tiefpaß werde durch eine Spannungsquelle mit sprunghaftem Verlauf der Quellenspannung betrieben, siehe nebenstehende Abbildung.

Die Quellenspannung soll im Zeitpunkt $t = 0$ von 0V auf den Wert U springen, siehe Bild 4-6a.

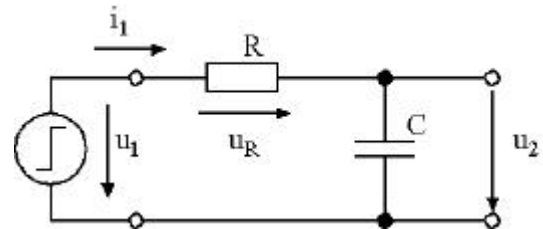


Bild 4-5 RC-Tiefpaß, Anregung mit Sprungfunktion

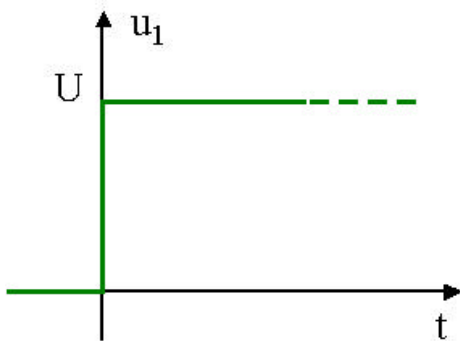


Bild 4-6a Quellenspannung nach der Sprungfunktion.

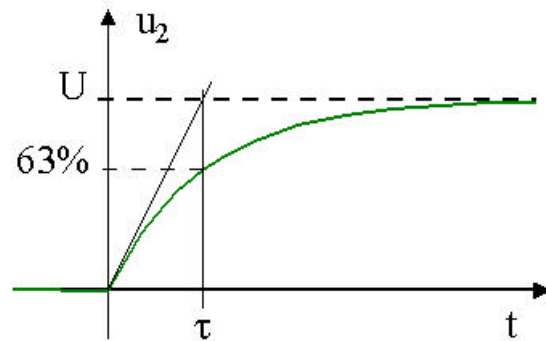


Bild 4-6b Sprungantwort des RC-Tiefpasses

Bestimmung der Sprungantwort mit Hilfe der Differentialgleichung für u_2 :

- 1.) Die Kirchhoffsche Maschen-Regel ergibt

$$u_1 = u_R + u_2$$

- 2.) Es gilt an R: $u_R = R \cdot i_1$
und an C: $i_1 = C \, du_2/dt$

- 3.) Einsetzen in die Maschengleichung ergibt: $u_1 = RC \cdot du_2/dt + u_2$

Da für $t > 0$ gilt $u_1 = U$, wird $U = RC \cdot du_2/dt + u_2$ Differentialgleichung für u_2

- 4.) Die Differentialgleichung hat grundsätzlich zwei Lösungsanteile, die homogene Lösung, die durch die Eigenschaften der Schaltung bestimmt ist, und die inhomogene Lösung, die durch die Anregung (Quellen) vorgegeben ist:

$$u_2(t) = u_{2,\text{hom}}(t) + u_{2,\text{inh}}(t)$$

- 5.) Die homogene Lösung erhält man, wenn die Anregung zu null gesetzt wird, hier: $U = 0$. Die homogene Differentialgleichung

$$0 = RC \cdot du_2/dt + u_2$$

hat eine Lösung der Form $u_{2,\text{hom}}(t) = U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$

Mit $du_2/dt = U_{2,\text{hom}} \lambda e^{\lambda t}$ erhält man: $0 = RC U_{2,\text{hom}} \lambda e^{\lambda t} + U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$

Nach Division durch $U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$: $0 = RC \lambda + 1$ Charakteristische Gleichung

Die Charakteristische Gleichung hat die Lösung $\lambda = -1/\tau$ mit $\tau = RC$
 t wird '**Zeitkonstante**' genannt.

Die homogene Lösung ist damit: $u_{2,\text{hom}}(t) = U_{2,\text{hom}} e^{-t/\tau}$

$U_{2,\text{hom}}$ ist zunächst eine Unbekannte, die aus Randbedingungen festzulegen ist.

- 6.) Die inhomogene Lösung ist wie die Anregung $u_1 = U$ eine Gleichspannung: $u_{2,\text{inh}}(t) = U_{2,\text{inh}}$

- 7.) Die vollständige Lösung $u_2(t) = U_{2,\text{hom}} e^{-t/\tau} + U_{2,\text{inh}}$

enthält noch die beiden Unbekannten $U_{2,\text{hom}}$ und $U_{2,\text{inh}}$.

Sie werden aus den Randbedingungen bei $t = 0$ und bei $t = \infty$ bestimmt:

$$u_2(t=0) = 0 = U_{2,\text{hom}} e^{-0/\tau} + U_{2,\text{inh}} \quad (\text{Anfangswert})$$

$$\text{Daraus folgt: } U_{2,\text{hom}} = -U_{2,\text{inh}}$$

$$\text{und } u_2(t=\infty) = U = U_{2,\text{hom}} e^{-\infty/\tau} + U_{2,\text{inh}}$$

$$\text{Wegen } e^{-\infty/\tau} = 0 \text{ folgt: } U_{2,\text{inh}} = U$$

- 8.) Die vollständige Lösung wird nun: $u_2(t) = -U e^{-t/\tau} + U$

$$u_2(t) = U \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Filterwirkung des RC-Tiefpasses

Der Frequenzgang des Übertragungsfaktors (siehe Bild 5-4) läßt erkennen, daß zwei unterschiedliche Frequenzbereiche existieren:

- (A) der Durchlaßbereich ab $f = 0$ bis zu einer **Grenzfrequenz f_g** mit $2\pi f_g = \omega_g = 1/t$
= der Bereich tiefer Frequenzen mit dem Wert $H \cong 1$ (d.h. 0dB)

Der Phasenwinkel von $\underline{H}$ verändert sich von 0° auf -45° .

Die Grenzfrequenz f_g ist dadurch gekennzeichnet, daß der reelle Widerstand R und der kapazitive Widerstand X_c gleich groß sind. Damit ergibt sich eine Spannungsteilung zwischen R und X_c im Verhältnis 1:1 und zwischen der Eingangsspannung und der Ausgangsspannung im Verhältnis $\hat{u}_1/\hat{u}_2 = \sqrt{2} / 1$ (entspr. 3dB).

- (B) Der Sperrbereich ab der Grenzfrequenz f_g bis $f \rightarrow \infty$
= der Bereich hoher Frequenzen mit abnehmenden Werten von H (d.h. mit zunehmender Dämpfung), umgekehrt proportional zur Frequenz: $H \sim 1/f$, im logarithmischen Maßstab nimmt H um 6dB pro Frequenzoktave ab. Eine Oktave ist das Frequenzverhältnis von 2:1.

Eine vereinfachte Darstellung von $H(f)$ zeigt das folgende Bild:

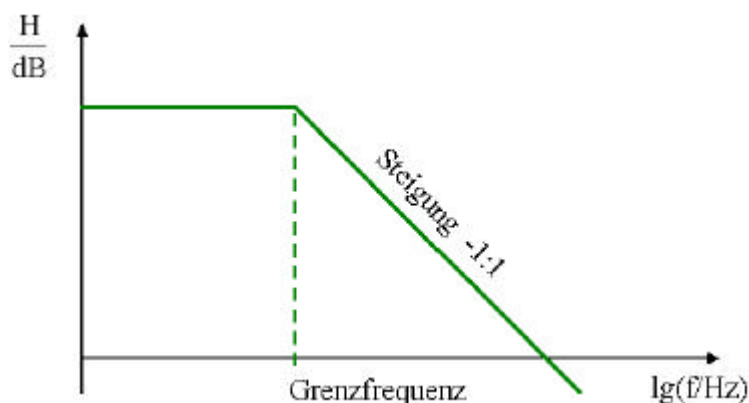


Bild 4-7 RC-Tiefpaß, $H(f)$ vereinfacht

Die Filterwirkung eines einfachen RC-Tiefpasses ist eher mäßig. Eine deutliche Dämpfung a im Sperrbereich ergibt sich erst weit oberhalb der Grenzfrequenz: $f = 10 \cdot f_g \Rightarrow a = 20\text{dB}$

Anwendungen des RC-Tiefpasses

- Filterung eines Empfangssignals durch Unterdrücken von Anteilen eines Störsignals oberhalb der Signalbandbreite.
- Unterdrücken von unerwünschten Oberwellen, um die Bandbreite eines zu übertragenden Signals zu beschränken.
- Anwendung als Vorfilter (Anti-Aliasing) für die A/D-Wandlung.
- Unterdrücken von Störungen auf einer Versorgungsspannung für elektronische Schaltungen (ICs).

4.2.2 Hochpaß mit Widerstand und Kapazität

(A) Betrieb mit sinusförmigen Strömen und Spannungen; Betrachtung im Frequenzbereich

Gegeben: $u_1(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$
 R, C

Gesucht: i_1 und u_2

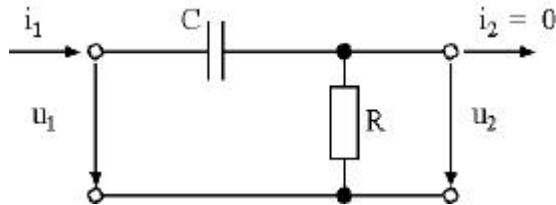


Bild 4-8 RC-Hochpaß

Komplexe Darstellung:

$$\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 e^{j\varphi_1}, \quad \underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{Eingangsimpedanz: } \underline{Z}_{\text{ein}} = \underline{\hat{u}}_1 / \hat{i}_1 = R - j \frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \hat{i}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_1}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \hat{u}_1 \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR}$$

$$\text{Betrag: } |\hat{i}_1| = \hat{u}_1 \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\text{Phase: } \varphi_{i1} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega CR)$$

$$\text{also } i_1(t) = \hat{u}_1 \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \cos(\omega t + \varphi_1 - \arctan(\omega CR))$$

$$\text{und } \underline{\hat{u}}_2 = \hat{i}_1 R = \hat{u}_1 \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

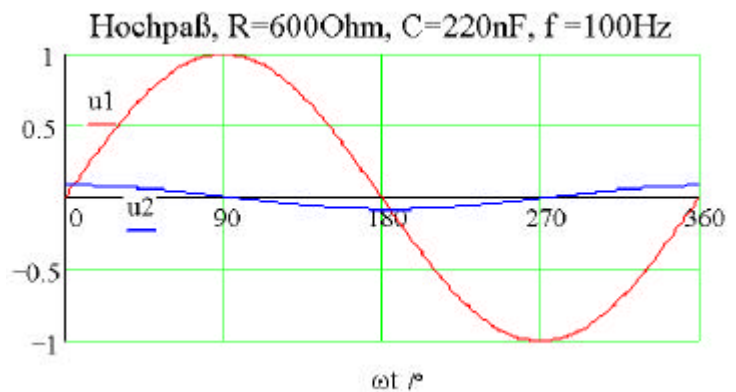
$$\text{Betrag: } |\hat{u}_2| = \hat{u}_1 \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\text{Phase: } \varphi_{u2} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega CR)$$

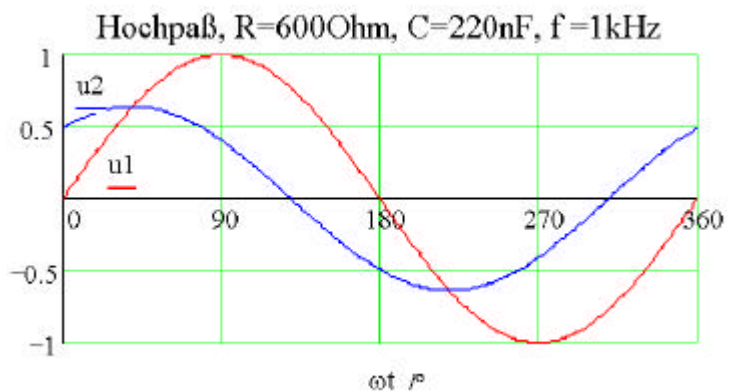
$$\text{also } u_2(t) = \hat{u}_1 \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \cos(\omega t + \varphi_1 - \arctan(\omega CR))$$

Zeitliche Verläufe von Ein- und Ausgangsspannung im Vergleich

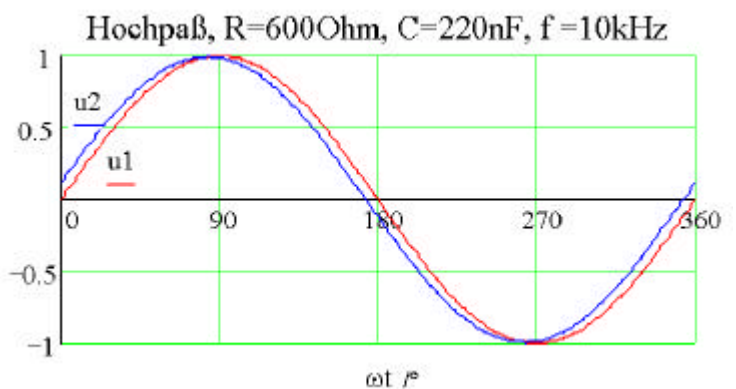
- (a) Betrieb bei tiefer Frequenz
im Sperrbereich



- (b) Betrieb bei der Grenzfrequenz
zwischen Durchlaß- und
Sperrbereich



- (c) Betrieb bei höheren Frequenzen
im Durchlaßbereich



Bilder 4-9a-c RC-Hochpaß, Anregung mit sinusförmiger Spannung

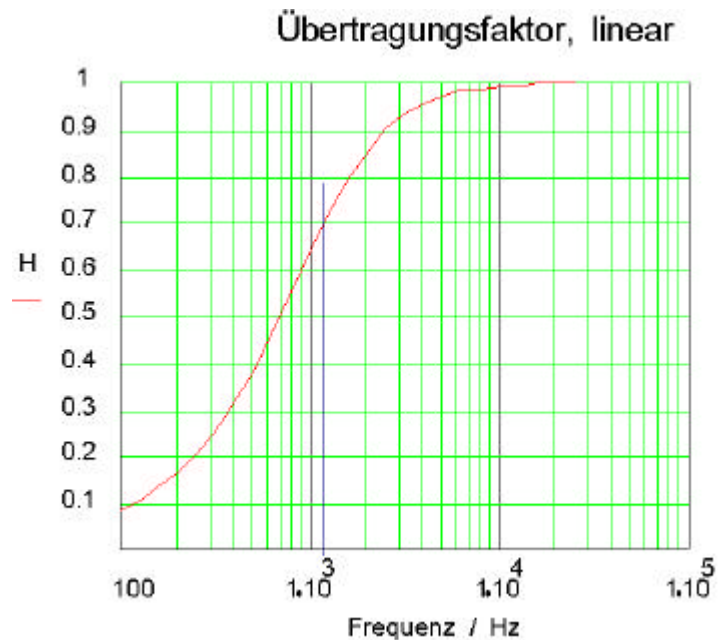
Übertragungsfaktor $\underline{H}(f)$:

$$\underline{H}(f) = \hat{u}_2 / \hat{u}_1 = \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

$$\text{Betrag: } |\underline{H}(f)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$

$$\text{Phase: } \varphi(f) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega CR)$$

Bild 4-10 Übertragungsfaktor $|\underline{H}|$
für einen RC-Hochpass mit
 $R = 600\Omega$ und $C = 220\text{pF}$



Die Grenzfrequenz f_g ist definiert für den Punkt, in dem $|\underline{H}|$ gegenüber dem Maximalwert 1 auf 70,7% (entspr. -3dB) abgefallen ist. Im Beispiel Bild 4-10 ist dies ca. $f_g = 1200\text{Hz}$, markiert durch die vertikale blaue Linie.

Bild 4-11 zeigt den Betrag und den Phasenwinkel des Übertragungsfaktors in der Darstellung des Bode-Diagramms; der Betrag ist im logarithmischen Maß mit der Einheit dB abgebildet, siehe Bild 4-11a. Die Grenzfrequenz (blaue vertikale Linie) liegt hier bei $|\underline{H}|_{\log} = -3\text{dB}$, der Phasenwinkel hat bei der Grenzfrequenz den Wert $+45^\circ$, siehe Bild 4-11b.

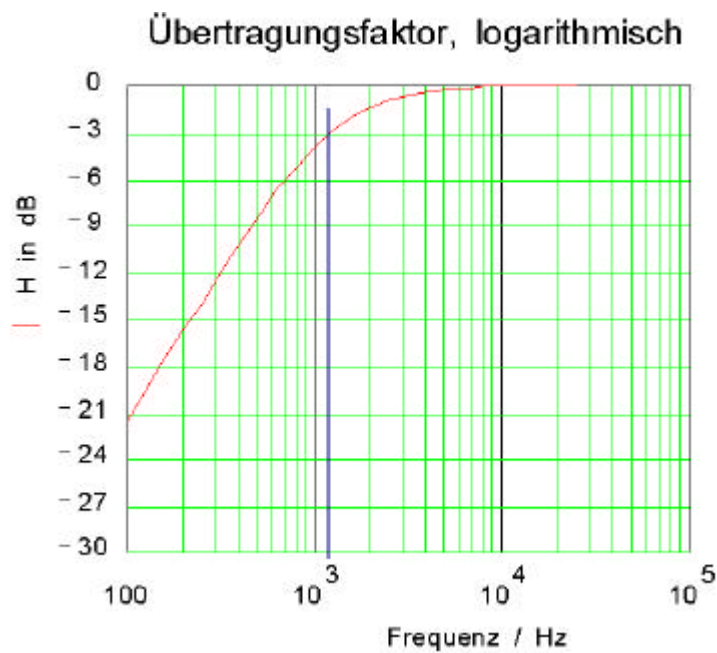


Bild 4-11a RC-Hochpass zu Bild 5-4, Übertragungsfaktor im logarithmischen Maß

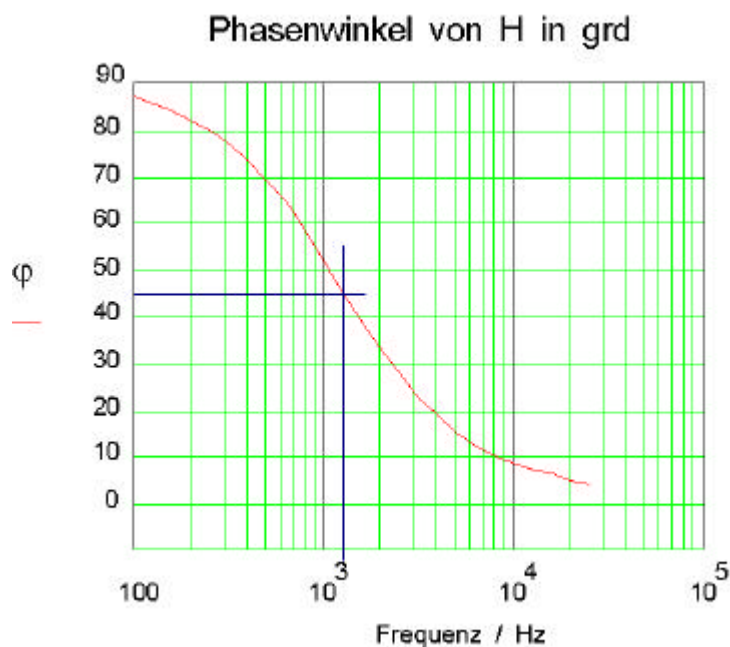


Bild 4-11b RC-Hochpass zu Bild 4-4, Phasenwinkel

(B) RC-Hochpaß / Anregung mit Sprungfunktion; Betrachtung im Zeitbereich

Der RC-Hochpaß werde durch eine Spannungsquelle mit sprunghaftem Verlauf der Quellenspannung betrieben, siehe nebenstehende Abbildung.

Die Quellenspannung soll im Zeitpunkt $t = 0$ von 0V auf den Wert U springen, siehe Bild 4-13a.

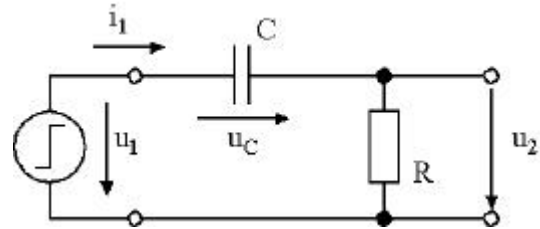


Bild 4-12 RC-Hochpaß, Anregung mit Spannungssprung

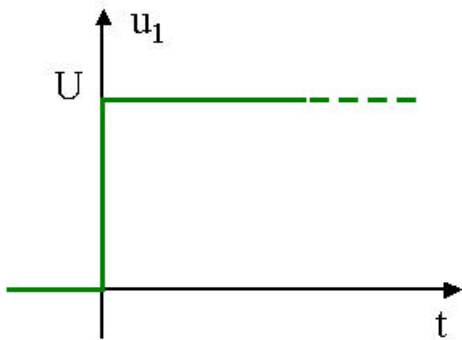


Bild 4-13a Quellenspannung nach der Sprungfunktion.

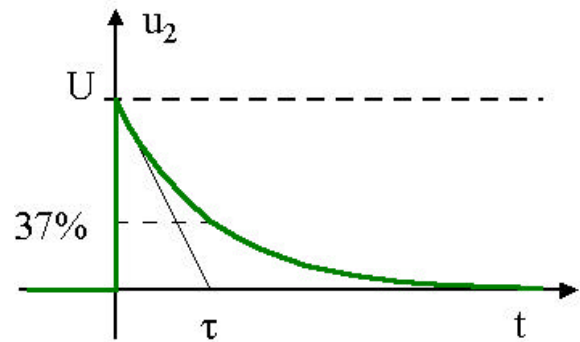


Bild 4-13b Sprungantwort des RC-Hochpasses

Bestimmung der Sprungantwort mit Hilfe der Differentialgleichung für u_2 :

- 1.) Die Kirchhoffsche Maschen-Regel ergibt

$$u_1 = u_C + u_2$$

- 2.) Es gilt an R: $u_2 = R \cdot i_1$
und an C: $i_1 = C \, du_C/dt$

- 3.) Einsetzen in die Maschengleichung ergibt: $du_1/dt = du_2/dt + u_2/RC$

- 4.) Für $t > 0$ gilt $u_1 = U = \text{konst.} \Rightarrow 0 = RC \cdot du_2/dt + u_2$ Differentialgleichung für u_2

- 4.) Die Differentialgleichung hat grundsätzlich zwei Lösungsanteile, die homogene Lösung, die durch die Eigenschaften der Schaltung bestimmt ist, und die inhomogene Lösung, die durch die Anregung (Quellen) vorgegeben ist:

$$u_2(t) = u_{2,\text{hom}}(t) + u_{2,\text{inh}}(t)$$

- 5.) Die Differentialgleichung ist eine homogene Differentialgleichung ($0 = \dots$)

$$0 = RC \cdot du_2/dt + u_2$$

hat eine Lösung der Form $u_{2,\text{hom}}(t) = U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$

Mit $du_2/dt = U_{2,\text{hom}} \lambda e^{\lambda t}$ erhält man: $0 = RC U_{2,\text{hom}} \lambda e^{\lambda t} + U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$

Nach Division durch $U_{2,\text{hom}} e^{\lambda t}$: $0 = RC \lambda + 1$ Charakteristische Gleichung

Die Charakteristische Gleichung hat die Lösung $\lambda = -1/\tau$ mit $\tau = RC$
 t wird '**Zeitkonstante**' genannt.

Die homogene Lösung ist damit: $u_{2,\text{hom}}(t) = U_{2,\text{hom}} e^{-t/\tau}$

$U_{2,\text{hom}}$ ist zunächst eine Unbekannte, die aus Randbedingungen festzulegen ist.

- 6.) Die inhomogene Lösung ist wie die Anregung $u_1 = U$ eine Gleichspannung: $u_{2,\text{inh}}(t) = U_{2,\text{inh}}$

- 7.) Die vollständige Lösung $u_2(t) = U_{2,\text{hom}} e^{-t/\tau} + U_{2,\text{inh}}$

enthält noch die beiden Unbekannten $U_{2,\text{hom}}$ und $U_{2,\text{inh}}$.

Sie werden aus den Randbedingungen bei $t = 0$ und bei $t = \infty$ bestimmt:

$$u_2(t=0) = U = U_{2,\text{hom}} e^{-0/\tau} + U_{2,\text{inh}} \quad (\text{Anfangswert für C ungeladen})$$

$$\text{Daraus folgt: } U = U_{2,\text{hom}} + U_{2,\text{inh}}$$

$$\text{und } u_2(t=\infty) = 0 = U_{2,\text{hom}} e^{-\infty/\tau} + U_{2,\text{inh}} \quad (\text{kein Strom mehr})$$

$$\text{Wegen } e^{-\infty/\tau} = 0 \text{ folgt: } U_{2,\text{inh}} = 0$$

- 8.) Die vollständige Lösung wird nun: $u_2(t) = U e^{-t/\tau}$

Filterwirkung des RC-Hochpasses

Der Frequenzgang des Übertragungsfaktors (siehe Bild 4-11) läßt erkennen, daß zwei unterschiedliche Frequenzbereiche existieren:

- (A) der Sperrbereich ab $f = 0$ bis zu einer **Grenzfrequenz f_g** mit $2\pi f_g = \omega_g = 1/t$
= der Bereich tiefer Frequenzen mit dem $H(f)$ ansteigend proportional zu f
Der Phasenwinkel von $\underline{H}$ verändert sich von $+90^\circ$ auf $+45^\circ$.
Die Grenzfrequenz f_g ist dadurch gekennzeichnet, daß der reelle Widerstand R und der kapazitive Widerstand X_c gleich groß sind. Damit ergibt sich eine Spannungsteilung zwischen R und X_c im Verhältnis 1:1 und zwischen der Eingangsspannung und der Ausgangsspannung im Verhältnis $\hat{u}_1/\hat{u}_2 = \sqrt{2} / 1$ (entspr. 3dB).
- (B) Der Durchlaßbereich von der Grenzfrequenz f_g bis $f \rightarrow \infty$
= der Bereich hoher Frequenzen mit $H(f) \cong 1$ (d.h. 0dB, geringe Dämpfung).

Eine vereinfachte Darstellung von $H(f)$ zeigt das folgende Bild:

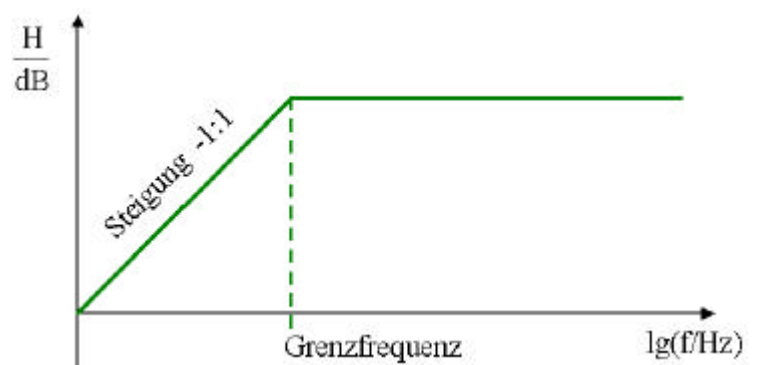


Bild 4-14 RC-Hochpaß, $H(f)$ vereinfacht

Die Filterwirkung eines einfachen RC-Hochpasses ist eher mäßig. Eine deutliche Dämpfung a im Sperrbereich ergibt sich erst weit unterhalb der Grenzfrequenz: $f = 0,1 \cdot f_g \Rightarrow a = 20\text{dB}$

Anwendungen des RC-Hochpasses

- Anwendung als Vorfilter beim Empfang von Bandpaß-Signalen zur Unterdrückung von niederfrequenten Fremdsignalen und von Störungen (z.B. Netzfrequenz).
- In elektronischen Schaltungen und zwischen Baugruppen: Abtrennen einer Gleichspannung (Versorgungsspannung) von einem Nachrichtensignal.

4.2.3 Beispiele für die Beeinflussung von Signalen durch RC-Filter

(A) *RC-Tiefpaß* mit $R = 600\Omega$, $C = 220\text{nF}$
Zeitkonstante $\tau = 132\mu\text{s}$, Grenzfrequenz $f_g = 1206\text{Hz}$

Bild 4-15

Eingangssignal $u_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-0,5\text{ms}}{1\text{ms}}\right)$
und Ausgangssignal $u_2(t)$

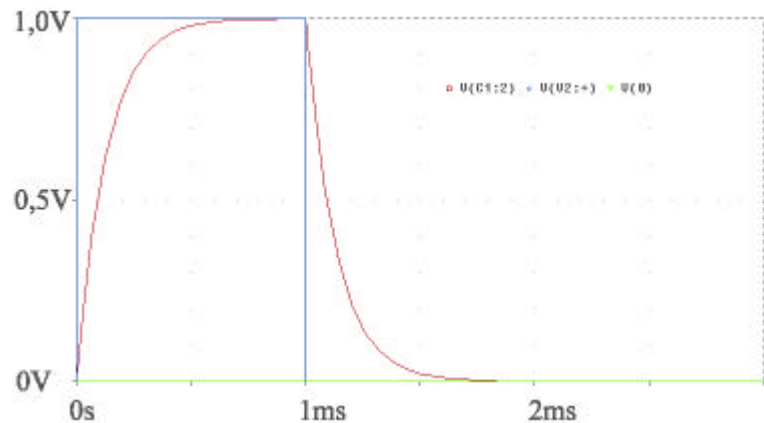


Bild 4-16

Eingangssignal $u_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{2\tau}\right)$
und Ausgangssignal $u_2(t)$

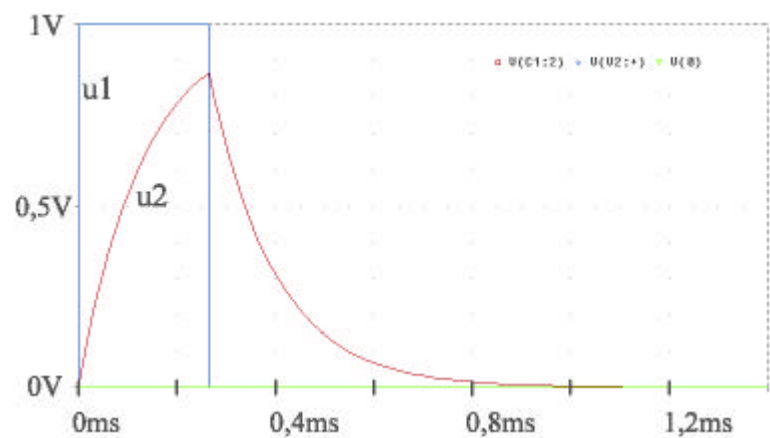
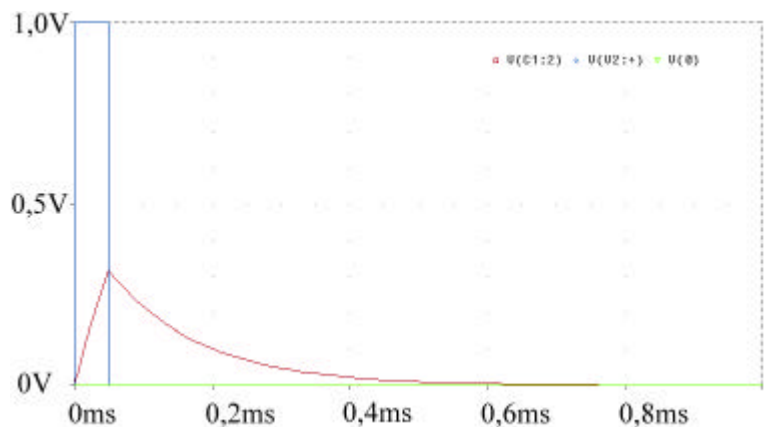


Bild 4-17

Eingangssignal $u_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-5\mu\text{s}}{10\mu\text{s}}\right)$
und Ausgangssignal $u_2(t)$



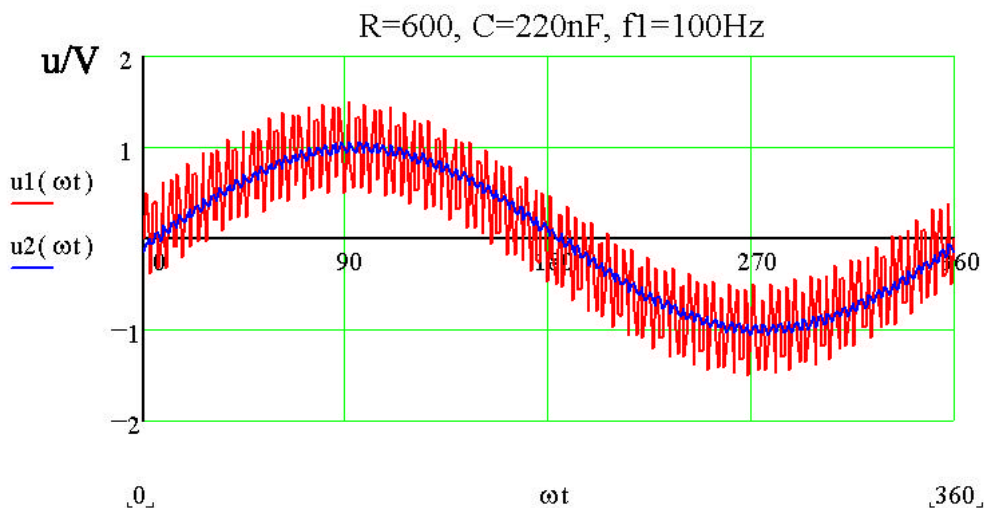


Bild 4-18 Eingangssignal $u_1(\omega t) = 1\text{V}\sin(2\pi 100\text{Hz}\cdot t) + 0,5\text{V}\sin(2\pi 10\text{kHz}\cdot t)$
und Ausgangssignal $u_2(\omega t)$

(B) *RC-Hochpaß* mit $R = 600\Omega$, $C = 220\text{nF}$
Zeitkonstante $\tau = 132\mu\text{s}$, Grenzfrequenz $f_g = 1206\text{Hz}$

Bild 4-19

Eingangssignal

$$u_1(t) = 1\text{V} \operatorname{rect}\left(\frac{t-0,2\text{ms}}{0,4\text{ms}}\right)$$

und Ausgangssignal $u_2(t)$

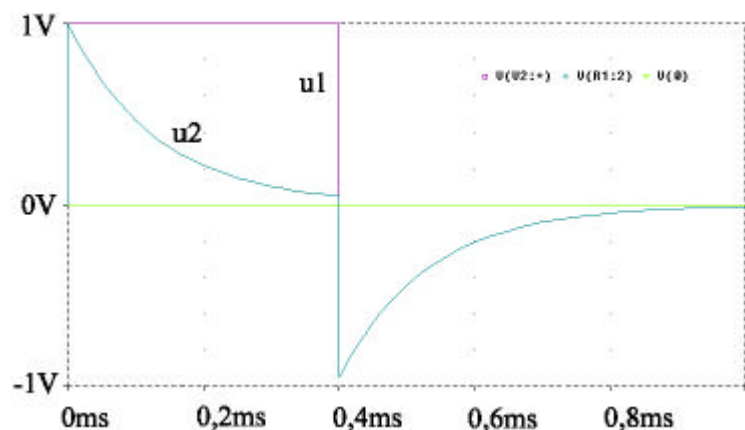
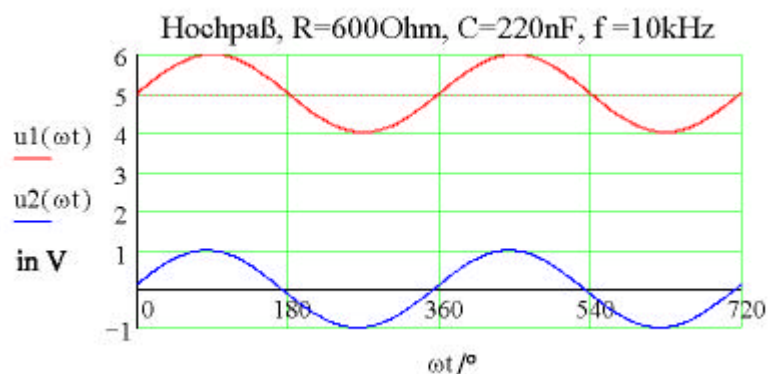


Bild 4-20

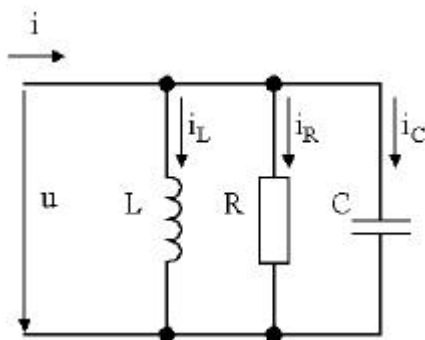
Eingangssignal

$$u_1(t) = 5\text{V} + 1\text{V} \sin(2\pi 10\text{kHz} t)$$

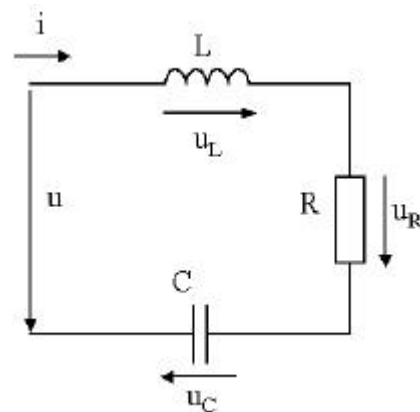
und Ausgangssignal $u_2(t)$



4.3 RLC-Schwingkreise



a) Parallelschwingkreis



b) Serienschwingkreis

Bild 4-21 Schaltbilder von Parallel- und Serienschwingkreis

4.3.1 Komplexer Widerstand Z und Leitwert Y

Parallelschwingkreis

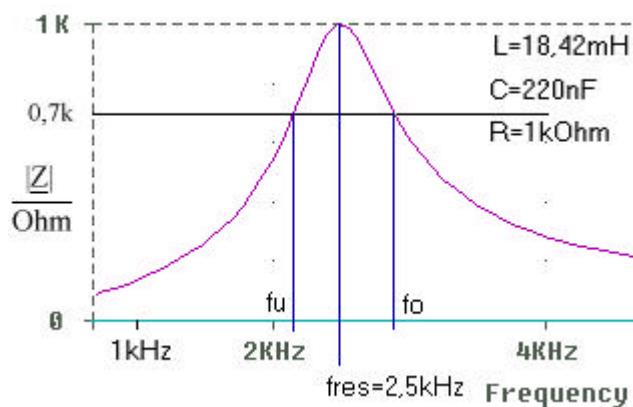
$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right); \quad G = 1/R$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

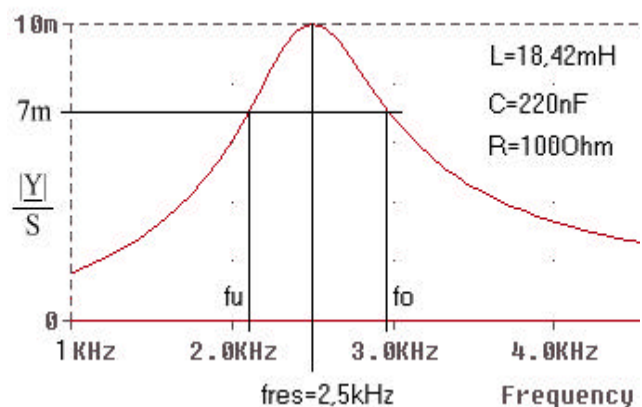
Serienschwingkreis

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$



a) Parallelschwingkreis



b) Serienschwingkreis

Bild 4-22 Frequenzgang (a) des Scheinwiderstandes und (b) des Scheinleitwertes.

fres: Resonanzfrequenz, f_u: untere Bandgrenze, f_o: obere Bandgrenze

Parallelschwingkreis

Serienschwingkreis

Beträge und Phasenwinkel der Widerstände und Leitwerte:

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$$

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\varphi_Z = -\arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

$$\varphi_Y = -\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

4.3.2 Selektives Verhalten der Schwingkreise und Resonanz

Es gilt:

$$U_{\text{par}} = |Z| \cdot I_{\text{par}} \quad \text{mit } U_{\text{par}}, I_{\text{par}} :$$

Spannung, Strom am Parallelschwingkreis

$$I_{\text{ser}} = |Y| \cdot U_{\text{ser}} \quad \text{mit } U_{\text{ser}}, I_{\text{ser}} :$$

Spannung, Strom am Serienschwingkreis

Speist man den

Parallelschwingkreis
mit einem konstanten Strom

Serienschwingkreis
mit einer konstanten Spannung

und variiert die Frequenz, so verändert sich

U_{par} genau wie $|Z|$ (f) in Bild 4-22a

I_{ser} genau wie $|Y|$ (f) in Bild 4-22b

Die Kurven in Bild 4-22 lassen erkennen, daß

die Spannung U_{par} am Parallelschwingkreis
bei konstantem Strom I_{par}

der Strom I_{ser} durch den Serienschwingkreis
bei konstanter Spannung U_{ser}

ein ausgeprägtes Maximum aufweist.

Das Maximum tritt bei der *Resonanzfrequenz* auf:

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Bei Resonanz heben sich

im Parallelschwingkreis i_L und i_C

im Serienschwingkreis u_L und u_C

gegenseitig auf

Der Widerstand des Schwingkreises ist dann gleich dem Wirkwiderstand R .

Ströme und Spannungen bei Resonanz

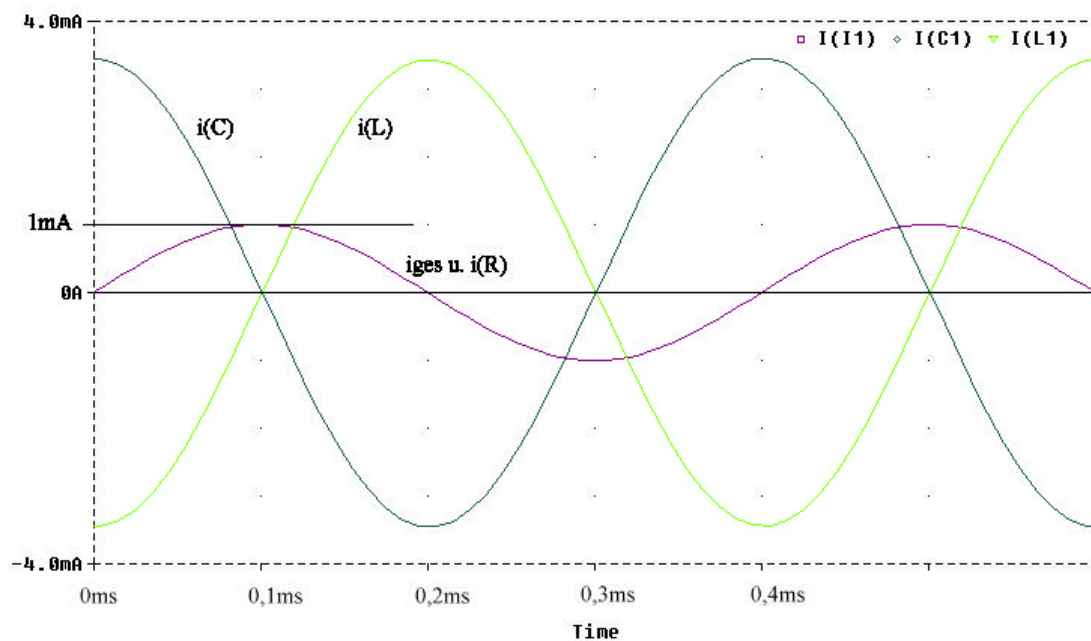


Bild 4-23a Parallelkreis: Gesamtstrom I_{ges} und Zweigströme bei Resonanz
Werte für R, L, C wie in Bild 4-22a

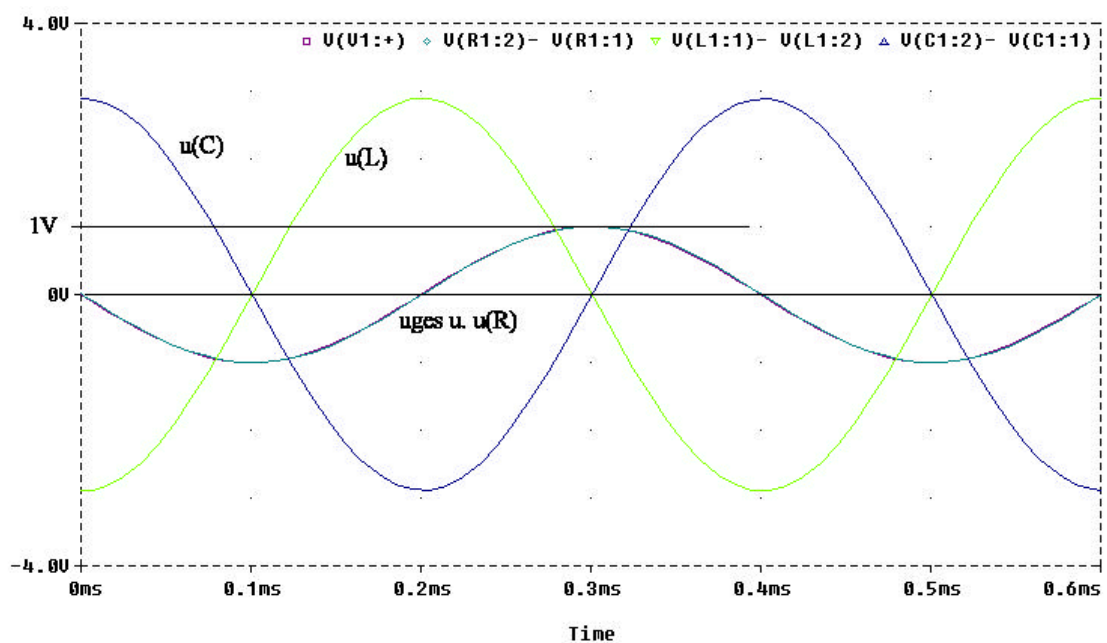


Bild 4-23a Serienkreis: Gesamtspannung u_{ges} und Teilspannungen bei Resonanz
Werte für R, L, C wie in Bild 4-22b

Kennleitwert Y_K und Kennwiderstand Z_K , Güte Q , Dämpfung d

Die Schaltelemente L und C haben bei der Resonanzfrequenz

den Widerstand $Z_K = 2\pi f_{\text{res}} L = \frac{1}{2\pi f_{\text{res}} C}$ und den Leitwert $Y_K = 2\pi f_{\text{res}} C = \frac{1}{2\pi f_{\text{res}} L}$

Das Verhältnis $Q = Y_K/G$ beim Parallelkreis gibt an, um welchen Faktor die Ströme I_L und I_C größer als der Strom I_R sind

bzw. das Verhältnis $Q = Z_K/R$ beim Serienkreis gibt an, um welchen Faktor die Spannungen U_L und U_C größer als die Spannung U_R sind.

Die sog. Güte Q kann Werte von 10 oder 20 oder sogar einige 100 erreichen. Damit können im Parallelkreis die Zweigströme durch L und C wesentlich größer als der Gesamtstrom sein bzw. können im Serienkreis die Spannungen an L und C wesentlich größer als die Gesamtspannung sein.

Der Kehrwert der Güte ist die „Dämpfung“ d , also $d = 1/Q$.

Grenzfrequenzen und Bandbreite

Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird durch die *untere Grenzfrequenz* f_u und die *obere Grenzfrequenz* f_o begrenzt. Der Frequenzbereich zwischen f_u und f_o wird *Bandbreite* B genannt:

$$B = f_o - f_u$$

Für die Grenzfrequenzen gilt, daß

a) im Parallelschwingkreis

die Summe der Blindleitwerte $|B_C + B_L| = |\omega C - 1/\omega L|$ gerade so groß wie der Wirkleitwert G ist. Der Gesamtleitwert $\underline{Y}$ ist damit um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als bei Resonanz und hat den Phasenwinkel $\varphi_Y = -\pi/4$ bei f_u bzw. $+\pi/4$ bei f_o .

b) im Serienschwingkreis

die Summe der Blindwiderstände $|X_L + X_C| = |\omega L - 1/\omega C|$ gerade so groß wie der Wirkwiderstand R ist. Der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ ist damit um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als bei Resonanz und hat den Phasenwinkel $\varphi_Z = -\pi/4$ bei f_u bzw. $+\pi/4$ bei f_o .

Beziehung zwischen Bandbreite, Resonanzfrequenz und Güte:

$$Q = \frac{f_{\text{res}}}{B}$$

Die Verhältnisse lassen sich gut mittels der *Ortskurven* von $\underline{Z}$ darstellen, siehe Bild 4-24 und 4-25.

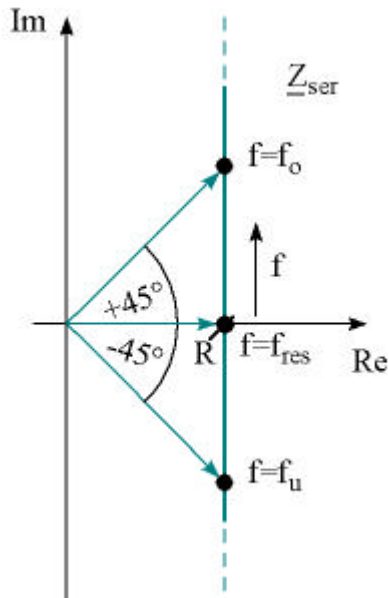


Bild 4-24 Impedanz $\underline{Z}(f)$ des Serienkreises

Bei den Grenzfrequenzen f_u und f_o ist der Imaginärteil genauso groß wie der Realteil. Daher wird der Winkel -45° oder $+45^\circ$.

Bei tiefen Frequenzen ist $\underline{Z}$ kapazitiv, bei hohen Frequenzen ist $\underline{Z}$ induktiv. Bei sehr tiefen und bei sehr hohen Frequenzen geht der Betrag von $\underline{Z}$ gegen unendlich.

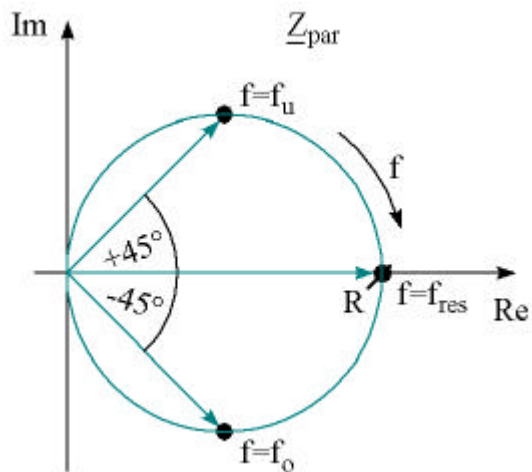


Bild 4-25 Impedanz $\underline{Z}(f)$ des Parallelkreises

Bei den Grenzfrequenzen f_u und f_o ist der Imaginärteil genauso groß wie der Realteil. Daher wird der Winkel $+45^\circ$ oder -45° .

Bei tiefen Frequenzen ist $\underline{Z}$ induktiv, bei hohen Frequenzen ist $\underline{Z}$ kapazitiv. Bei sehr tiefen und bei sehr hohen Frequenzen geht der Betrag von $\underline{Z}$ gegen null.

4.3.3 Zeitverhalten der Schwingkreise

Die folgenden Bilder zeigen das Verhalten des Serienschwingkreises bei Anregung mit einer Spannungsquelle, die einen Spannungssprung oder eine eingeschaltete Sinus-Spannung erzeugen kann.

Bild 4-26 Serienschwingkreis
an einer Spannungsquelle
mit variabler Quellenspannung

$$L = 18,42\text{mH}, \quad C = 220\text{nF}$$

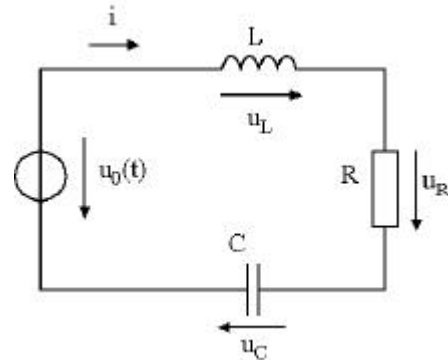
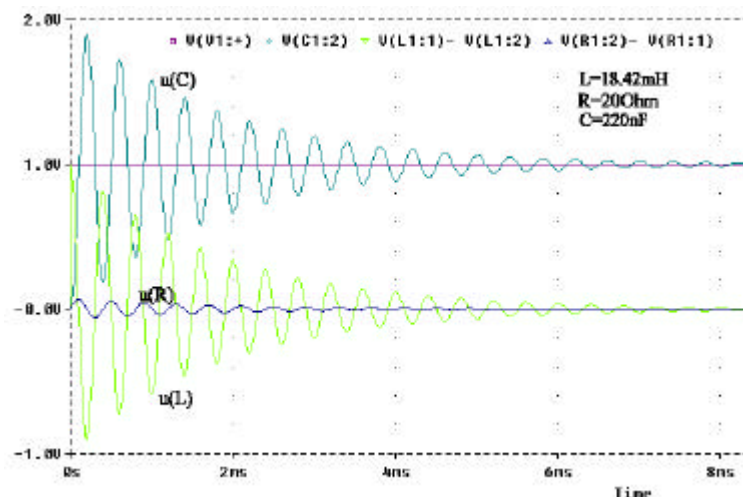


Bild 4-27 Reaktion des Serienschwingkreises auf einen Spannungssprung
 $u_0(t) = 1\text{V } \varepsilon(t)$

a) bei geringer Dämpfung

$$R = 20\Omega$$



b) mit sehr stark gedämpfter
Eigenschwingung

$$R = 500\Omega$$

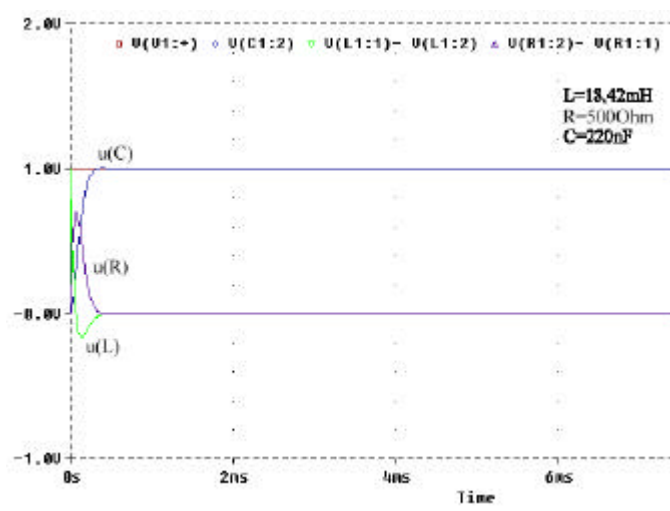
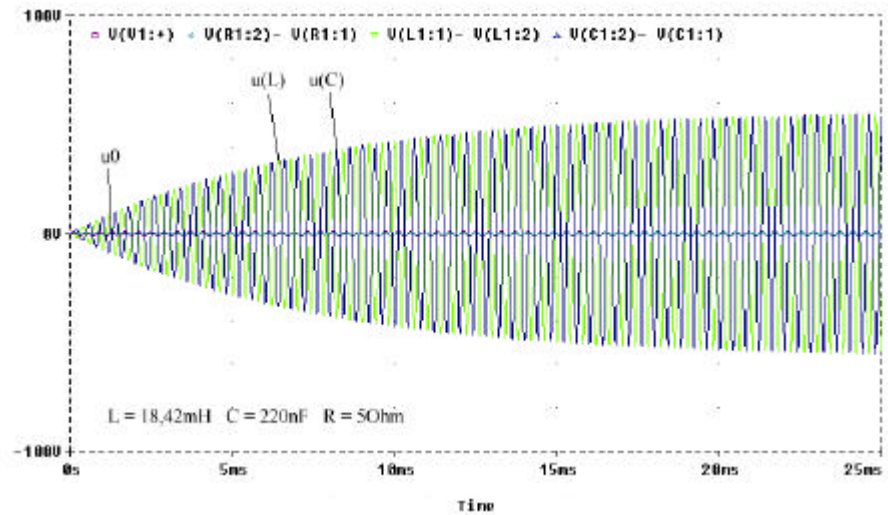
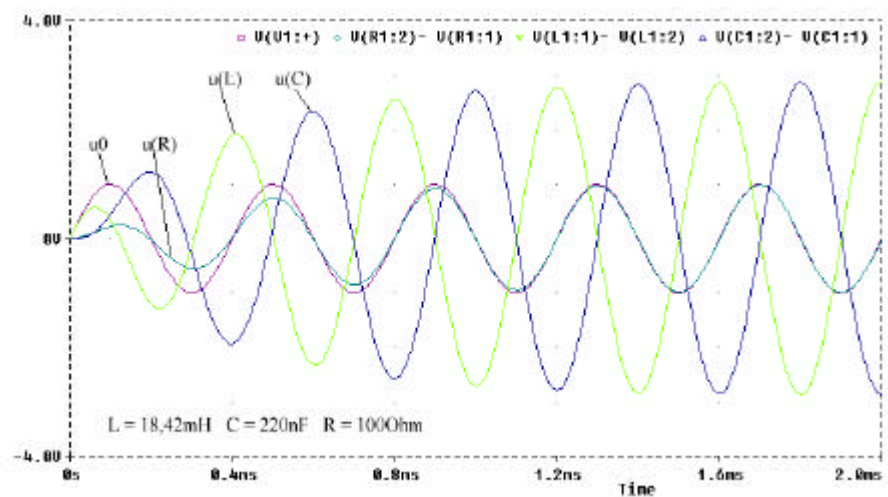


Bild 4-28 Reaktion des Serienschwingkreises auf eine eingeschaltete Sinus-Spannung mit $u_0(t) = 1V \varepsilon(t) \sin(2\pi \cdot 2,5kHz \cdot t)$.

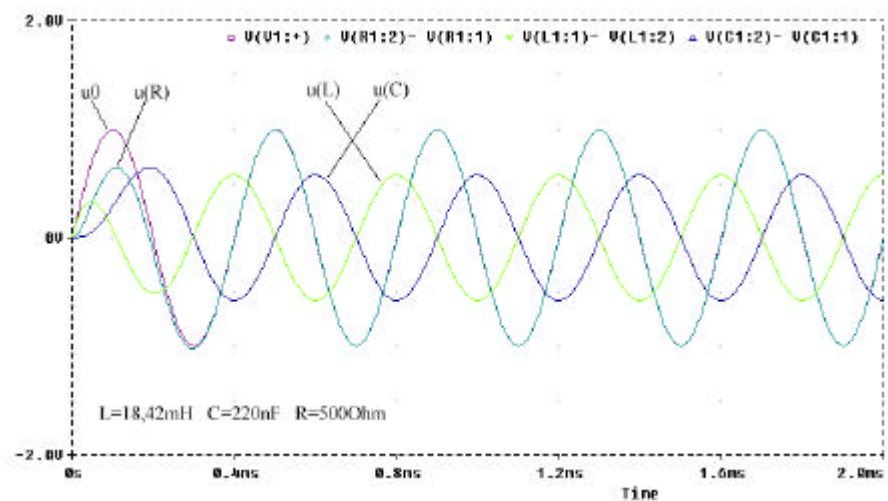
a) bei geringer Dämpfung



b) bei mäßiger Dämpfung



c) bei hoher Dämpfung



Herleitung des Zeitverhaltens mittels der Differentialgleichung

Grundlage ist das Schaltbild nach Bild 4-26. Die Herleitung erfolgt entsprechend der Darstellung zum RC-Tiefpaß, siehe 4.2.1. Zunächst wird die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ aufgestellt:

$$\text{Maschenregel} \rightarrow u_0 = u_L + u_R + u_C$$

Mit den Gleichungen für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Schaltelementen erhält man

$$u_0 = L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0)$$

$$\text{nach Differenzieren:} \quad 0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \quad \leftarrow \text{Differentialgl. für } i(t)$$

$$\text{Mit dem Ansatz } i(t) = I_h e^{\lambda t} \text{ folgt } 0 = LC \lambda^2 + RC \lambda + 1$$

$$\text{bzw.} \quad 0 = \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} \quad \leftarrow \text{Charakteristische Gleichung}$$

$$\text{mit den Lösungen:} \quad \lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{Darin bedeuten:} \quad d = \frac{R}{2L} \quad \leftarrow \text{die Dämpfung}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \leftarrow \text{die Resonanzkreisfrequenz}$$

$$\text{Fall 1: } d^2 - \omega_0^2 < 0$$

Verwendet wird auch die Größe „Eigenkreisfrequenz“ ω_e und „Eigenfrequenz“ f_e :

$$\omega_e = \sqrt{d^2 - \omega_0^2} \quad \leftarrow \text{die Eigenkreisfrequenz}$$

Mit f_e schwingt der Serienkreis, wenn er angeregt wurde, vorausgesetzt $d^2 - \omega_0^2 < 0$

Die Lösungen für λ sind dann konjugiert komplexe Werte

$$\lambda_{1,2} = -d \pm j\omega_e$$

$$\text{und } i(t) \text{ folgt der Gleichung} \quad i(t) = (I_{h1} e^{j\omega_e t} + I_{h2} e^{-j\omega_e t}) e^{-dt}$$

Die Unbekannten Größen I_{h1} und I_{h2} ergeben sich aus Randbedingungen bei $t = 0$ und $t = \infty$.

Die vollständige Lösung für $i(t)$
mit $u_0(t) = U \varepsilon(t)$ ist hier:

$$i(t) = \frac{U}{\omega_e L} e^{-dt} \sin(\omega_e t)$$

Beispiele zeigen die Bilder 3-27a und b.

Fall 2: $d^2 - \omega_0^2 > 0$

Die Dämpfung d (d.h. R) ist so groß, daß keine Eigenschwingungen möglich sind. Die Lösungen der Charakteristischen Gleichung sind reell:

$$\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$$

Auf einen Spannungssprung $u_0(t) = U \varepsilon(t)$ reagieren Strom und Spannungen des Serienkreises in Form von zwei e-Funktionen mit verschiedenen negativen Exponenten, d.h. zwei verschiedenen Zeitkonstanten:

$$i(t) = I_{h1} e^{\lambda_1 t} + I_{h2} e^{\lambda_2 t}$$

Aus der Randbedingung $i(t=0) = 0$ folgt wieder: $I_{h2} = -I_{h1}$

Aus der Randbedingung $u_L(t=0) = U$ folgt: $\frac{di}{dt} = \frac{U}{L} = I_{h1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 0} - \lambda_2 e^{\lambda_2 0}) = I_{h1} (\lambda_1 - \lambda_2)$

$$= I_{h1} 2 \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$$

$$I_{h1} = \frac{U}{2L\sqrt{d^2 - \omega_0^2}}$$

Beispiel für $L = 18,42\text{mH}$, $C = 220\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $U = 1\text{V}$

$$\Rightarrow d = 27144\text{s}^{-1} \quad \omega_0 = 15709\text{s}^{-1}$$

$$\lambda_1 = -5007\text{s}^{-1} \quad \tau_1 = -1/\lambda_1 = 0,2\text{ms}$$

$$\lambda_2 = -49282\text{s}^{-1} \quad \tau_2 = -1/\lambda_2 = 20,3\mu\text{s}$$

$$I_{h1} = 1,226\text{mA}$$

$$i(t) = 1,226\text{mA} (e^{-5007\text{s}^{-1} \cdot t} - e^{-49282\text{s}^{-1} \cdot t})$$

Bild 4-29
Reaktion des Serienkreises
mit hoher Dämpfung
auf einen Spannungssprung

$$u_0(t) = 1\text{V} \varepsilon(t)$$

